Segona prova Models Matemàtics de l'Economia. Curso 07-08

Professors. Lorenzo Burlon. Maria del Mar Gómez.

Cada pregunta tipus test val 1 punt.

Les respostes incorrectes NO resten punts.

Problema 1. Considera el problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimitzar} & x - 2y \\ \text{s. a} & x^2 + y^2 \leq 5, \\ & x - y \leq 1, \end{array}$$

Una solució de les condicions de Kuhn-Tucker és:

a) $(-1, 2)$
b) $(1, -2)$
c) $(2, -7)$
d) $(-7, 2)$

Problema 2. El punt de la pregunta anterior és:

a) es màxim global
b) es mínim global
c) es un punt de sella
b) es mínim global però no local

Problema 3. Considera l'equació diferencial $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = e^{2t}$.
La solució general de l'equació homogènea és:
(a) $x_h(t) = e^{2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t))$.
(b) $x_h(t) = Ae^{t} + Be^{-5t}$.
(c) $x_h(t) = e^{-2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t))$.
(d) $x_h(t) = Ae^{2+3it} + Be^{2-3it}$.

Problema 4. Una solució particular de l'equació $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = e^{2t}$. és:

(a) $x = 5te^{2t}$
(b) $x = e^{2t^2}$
(c) $x = 10e^{2t}$
(d) $x = \frac{1}{25}e^{2t}$

Problema 5. La solució general de l'equació diferencial $\ddot{x} - 16x = 0$ és:

(a) $x = Ae^{4it} + Be^{-4it}$
(b) $x = Ae^{4t} + e^{4t}$
(c) $x = Ae^{4t} + Be^{-4t}$
(d) $x = Ae^{4t} + Bte^{4t}$

Problema 6 (*). La solució del problema de valors inicials $\dot{x} = \dfrac{e^t}{x^2}$, con la condición inicial $x(0) = 1$ és:

(a) $x = -\dfrac{1}{e^t - 2}$.
(b) $x = (3e^t - 2)^{\frac{1}{3}}$.
(c) $x = (3e^t - 2)^{-\frac{1}{3}}$.
(d) $x = 3e^t - 2$.

Problema 7 (*). La solució general de l'equació diferencial $xdt + tdx$=0 és:

(a) $x(t) = Ke^{\frac{1}{t}}$
(b) $x(t) = \frac{K}{t}$
(c) $x(t) = Kt$
(d) Cap de les anteriors

Problema 8. La solució general de l'equació diferencial $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 1$ és

(a) $x = Ae^{-3t} + Be^{t} - \frac{1}{3}$
(b) $x = Ae^{-3t} + Be^{t} + 1$
(c) $x = A\cos(-3t) + B\sin t + 1$
(d) $x = Ae^{3t} + Be^{-t} - \frac{1}{3}$

PROBLEMA (per desenvolupar) de Programació Lineal. 2 punts

Una empresa produeix hamaques de dues mides, normal i gran. El benefici que obté per cada hamaca normal és de 400 euros i de 500 euros per cada hamaca gran.
El procés de fabricació de cada hamaca precisa de 3 etapes diferents, sent el temps necessàri per cada una de elles de 2h, 1h i 1h, respectivament, per a les hamaques de mida normal, i de 1h, 4h y 2h per a les hamaques de mida gran.
Si per cada etapa, l'empresa disposa diariament de un máxim de 16h, 16h i 11h, respectivament, es demana:

(a) Enunciar i resoldre el problema de maximizació associat.

Hem d'escriure matemàticament el que ens diuen a l'enunciat, volem maximitzar el benefici, sabent que per hamaca normal guanyem 400 euros i 500 per cada gran, llavors, posant x que representa la quantitat d'hamaques normals venudes i y que representa la quantitat d'hamaques grans, volem:

$$\text{maximitzar } 400x + 500y$$

sota les condicions de disponibilitat de temps a les 3 etapes de fabricació:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y \leq 16 \\ x + 4y \leq 16 \\ x + 2y \leq 11 \end{array}\right\}$$

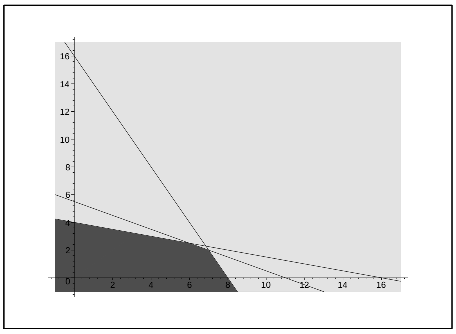

Figura 1: Dibuix al pla XY

el resolem gràficament trobant que la seva solució és:

$$(x^* = 7, y^* = 2)$$

(b) Enunciar y resoldre el problema dual corresponent.

El problema dual serà:

$$\text{minimitzar } 16\lambda + 16\mu + 11\gamma$$

sota les condicions:

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda + \mu + \gamma \geq 400 \\ \lambda + 4\mu + 2\gamma \geq 500 \end{array}\right\}$$

I per resoldre'l aplicarem el teorema de Folgança.

Primer estudiem què ens diuen les variables respecte a les condicions duals:

$$\begin{array}{l} x^* \neq 0 \Rightarrow 2\lambda^* + \mu^* + \gamma^* = 400 \\ y^* \neq 0 \Rightarrow 2\lambda^* + 4\mu^* + 2\gamma^* = 500 \end{array}$$

Com obtenim un sistema de 3 incògnites i dues equacions, necessitem més dades, per això estudiem què ens diuen les condicions respecte a les variables duals:

$$\begin{array}{l} 2x^* + y^* = 16 \Rightarrow \lambda^* \geq 0 \\ x^* + 4y^* = 15 < 16 \Rightarrow \mu^* = 0 \\ x^* + 2y^* = 11 \Rightarrow \gamma^* \geq 0 \end{array}$$

Resolent el sistema de tres equacions amb tres incògnites que ens queda trobem:

$$(\lambda^* = 100, \mu^* = 0, \gamma^* = 200)$$