PROBLEMES DE MODELS MATEMÀTICS DE L'ECONOMIA

Curs 2007-2008

Prof. M.M. Gómez Pujalte, Lorenzo Burlon

BLOC 1: CONVEXITAT i OPTIMITZACIÓ

1. Indiqueu quins d'aquests conjunts són convexos (podeu dibuixar-los o bé utilitzeu la definició):

   a) $S_1 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, 1 \leq x \leq 2, \, y \leq x + 2\}$.
   b) $S_2 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1, \, x > \frac{1}{2}\}$.
   c) $S_3 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$.
   d) $S_4 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, 9x^2 + 4y^2 \leq 36, \, (x-2)^2 + y^2 \leq 1, \, y \geq 0\}$.
   e) $S_5 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, x \geq -3, \, (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 4, \, y \geq x - 1\}$.
   f) $S_6 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1, \, x < -\frac{1}{2}\}$.
   g) $S_7 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, x > y^2\}$.
   h) $S_8 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, y \geq e^{2x}\}$.
   i) $S_9 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, x - y \leq 2\}$.
   j) $S_{10} = \{(x, y) \in R^2 \, : \, x^2 \leq y \leq x^4\}$.
   k) $S_{11} = \{(x, y) \in R^2 \, : \, (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 4\}$.

2. Feu el mateix pels següents conjunts:

   a) $H_1 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, y \geq x^3\}$.
   b) $H_2 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, x^2 + x - 5 \leq y \leq 3x - 2\}$.
   c) $H_3 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, y \geq \frac{1}{x^2}\}$.
   d) $H_4 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, y - e^x \geq 0, \, x \geq 0, \, y + x^2 - 2 \leq 0\}$.
   e) $H_5 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, 1 \leq x \leq 2, \, y \leq x + 2, \, y \geq 1 - x\}$.
   f) $H_6 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, |x - y| < 1\}$.
   g) $H_7 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, |x| = |y|\}$.
   h) $H_8 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, |x| + |y| \leq 1\}$.
   i) $H_9 = \{(x, y) \in R^2 \, : \, |x + y| \leq 2\}$.
   j) $H_{10} = \{(x, y) \in R^2 \, : \, x^2 + y^2 \geq 2x + 2\}$.

3. Emprant el resultat: *Una funció $f : S \subset R \to R$ és convexa si i només si el conjunt $Epigraf(f) = \{(x, y) \in R^2 \, : \, x \in S, \, y \geq f(x)\}$ és convex*, proveu que les funcions $f(x) = x^2$ i $f(x) = e^x$ són convexes.

4. Proveu que si les funcions $f(x)$ i $g(x)$ són còncaves, aleshores la funció $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ és també còncava.

5. Estudieu la concavitat i la convexitat de les funcions de dues variables:

   a) $f_1(x,y) = e^{xy} - e^{-xy}$,
   b) $f_2(x,y) = x + y - e^x - e^{x+y}$,
   c) $f_3(x,y) = e^{x+y} + e^{x-y} - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y$,
   d) $f_4(x,y) = x^3 + y^3 - xy$.
   e) $f_5(x,y) = \frac{x^2}{y} - ln(y)$,
   f) $f_6(x,y) = ye^x$,
   g) $f_7(x,y) = x^4 + y^4$,
   h) $f_8(x,y) = 2x - y - x^2 + 2xy - y^2$,
   i) $f_9(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 3$,
   j) $f_{10}(x,y) = 5x - 2x^2 + 3xy - 2y^2$,

6. Trobeu i classifiqueu els punts estacionaris (o crítics) de les funcions:

   a) $z_1(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$,
   b) $z_2(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$,
   c) $z_3(x,y) = x^3 + y^3 + 2x^2 + 4y^2 + 6$,
   d) $z_4(x,y) = x^2(y-1) + y^2(2x-1)$,
   e) $z_5(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
   f) $z_6(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$,
   g) $z_7(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$,
   h) $z_8(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$,
   i) $z_9(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
   j) $z_{10}(x,y) = x^3y^2(6 - x - y)$,
   k) $z_{11}(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2x^2$,
   l) $z_{12}(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$,
   m) $z_{13}(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2x^2$,
   n) $z_{14}(x,y) = y^3 + 3x^2y - 3x^2 - 3y^2 + 2$,
   o) $z_{15}(x,y) = x^2 + y^2$,
   p) $z_{16}(x,y) = y^2 - x^2$,

7. Sigui $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \, : \, x,y \geq 0, \; x + y \leq k\}$ amb k un nombre positiu. Resoleu el problema

   $$\text{Maximitzar} \quad f(x,y) = (x^3 + y^2)^{1/4} \quad \text{subjecte a} \quad (x,y) \in S,$$

   trobant primer els punts estacionaris de $f(x,y)$ a l'interior del conjunt S i, després, trobant el valor màxim i mínim de $f(x,y)$ a la frontera de S. Quin resultat (teorema) ens garanteix que el problema té una solució global?

8. Trobeu i classifiqueu els punts estacionaris (o crítics) de les funcions de tres variables:
   a) $f(x, y, z) = xy - xz + yz - z$,
   b) $f(x, y, z) = x + y + z$,
   c) $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + 4y^2 + xz + z^2 + 2$,
   d) $f(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 2yz + 6xz - 2xy$.

9. Considereu la funció $f(x, y) = x^3 - x^2y + 2y^2$. Comproveu que el punt $(6, 9)$ no és un mínim de $f(x, y)$ malgrat ser un punt de mínim respecte de x i y.

10. Maximitzeu els beneficis d'un monopolista que produeix dos béns A i B les demandes dels quals són, respectivament, $x = 6 - \frac{1}{2}p_1$ i $y = 8 - \frac{1}{4}p_2$, si la funció de costos ve donada per $C(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$. Per resoldre el problema, empreu primer el mètode de substitució i, després, el mètode dels multiplicadors de Lagrange.

11. Un monopolista produeix dos béns les demandes dels quals són: $q_1 = 680 - 5p_1 - 3p_2$, $q_2 = 430 - 3p_1 - 2p_2$. Si la funció de costos del monopolista és
$$C(q_1, q_2) = \frac{1}{6}q_1^2 - 10q_2 + 90$$
calculeu els nivells de producció que maximitzen el benefici del monopolista.

12. Resoleu gràficament el problema Màx $f(x, y) = x + y$ subjecte a la restricció $x^2 + y^2 = 1$.

13. Considereu el problema Max $f(x, y) = x + y$ subjecte a $g(x, y) = x^2 + y = 1$.
    a) Escriviu la funció lagrangiana i trobeu els candidats a màxim per a aquest cas. Quin d'ells és solució del problema?
    b) Expliqueu gràficament la solució dibuixant les corbes de nivell de $f(x, y)$ junt amb la gràfica de la paràbola $g(x, y) = 1$. Té solució el corresponent problema de minimització?
    c) Substituïu la restricció $g(x, y) = 1$ per $g(x, y) = 1.1$ i resoleu el problema per a aquest cas. Trobeu el canvi del valor òptim de $f(x, y)$ i vegeu si és aproximadament igual a $0.1\,\lambda$, essent λ el multiplicador de Lagrange del problema inicial.

14. Considereu el problema Min $f(x, y) = x^2 + y^2$ subjecte a $x + 2y = a$, essent a una constant.
    a) Resoleu el problema per substitució. Vegeu que efectivament heu trobat un mínim de $f(x, y)$.
    b) Escriviu la funció lagrangiana i trobeu els candidats a extrems (condicionats). Quin d'ells són mínims condicionats?
    c) Resoleu el problema estudiant les corbes de nivell de $f(x, y)$ i la gràfica de la recta $x + 2y = a$. A partir d'aquesta interpretació geomètrica de la solució, digueu si té solució el corresponent problema de maximització?

15. Resoleu els problemes d'optimització

a)

$$\text{Opt.} \quad f(x,y) = e^{x^2+y^2} \qquad \text{s.a.} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Són globals els òptims que heu trobat? Doneu una interpretació geomètrica del resultat.

b)

$$\text{Opt.} \quad f(x,y) = x^2 + ln(y) \qquad \text{s.a.} \quad 2x^2 + y^2 = 9.$$

Són globals els òptims que heu trobat?.

c)

$$\text{Opt.} \quad f(x,y) = xy \qquad \text{s.a.} \quad x - y = 1.$$

Són globals els òptims que heu trobat?.

d)

$$\text{Opt.} \quad f(x,y) = x + y + z \qquad \text{s.a.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Són globals els òptims que heu trobat?.

e)

$$\text{Opt.} \quad f(x,y,z) = 3x + 2y + z \qquad \text{s.a.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ i,\ x + y + z = 0.$$

Són globals els òptims que heu trobat?.

f)

$$\text{Opt.} \quad f(x,y,z) = 3x + 2y + z \qquad \text{s.a.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

Són globals els òptims que heu trobat?.