PROBLEMES DE MODELS MATEMÀTICS DE L'ECONOMIA

Curs 2007-2008

Prof. M.M. Gómez Pujalte, Lorenzo Burlon

BLOC 4: EQUACIONS DIFERENCIALS

1. Mira si cap de les funcions $x = e^{-t}$, $x = t + Ce^t$ i $x = 3t$ és solució d'alguna de les equacions diferencials següents:

$$\text{a)} \quad \dot{x} - x = 1 - t, \qquad \text{b)} \quad t\dot{x} = x, \qquad \text{c)} \quad \dot{x} + x = 0.$$

2. Comprova si les funcions donades són solució de les equacions diferencials:
a) $x(t) = \frac{a}{t}$, $\dot{x}t = -x$,
b) $x(t) = ae^{\frac{t}{a}}$, $x \ln(\dot{x}) = t\dot{x}$
c) $x(t) = Me^{3t} + Ne^{2t}$, $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$
d) $x = M \cos 3t + N \sin 3t$, $\ddot{x} + 9x = 0$
e) $x = \frac{Mt^2}{2} + N$, $t\ddot{x} - \dot{x} = 0$

3. Donada l'equació diferencial $t\dot{x} = 2x$, comprova que $x(t) = Ct^2$ és una solució per a tot valor de C. Trobeu la corba $x(t)$ que passa pel punt $(t, x) = (1, 2)$ (és a dir, la corba tal que $x(1) = 2$).

4. Prova que la funció $x(t) = Ct - C^2$ és solució de l'equació diferencial $(\dot{x})^2 = t\dot{x} - x$ per a tota C. Vegeu, en canvi, que aquesta família de funcions no conté totes les solucions perquè $x = t^2/4$ també és solució de l'equació.

5. Troba l'equació diferencial de cadascuna de les següents famílies de corbes al pla:
a) rectes que passen pel punt $(1, 2)$,
b) circumferències amb centre a l'origen de coordenades,
c) hipèrboles de la forma $xy = C$.

6. Suposa que $x(t)$ verifica $x(0) = 0$ i, a més, satisfà l'equació diferencial

$$\dot{x}(t) = (1 + x^2(t))\, t$$

per a tota t. Vegeu que $t = 0$ és un mínim global de $x(t)$ i que $x(t)$ és convexa.

7. Estudia les corbes integrals de les següents equacions diferencials, sense resoldre-les:

$$\text{a)} \quad \dot{x} = 1 + x^2, \qquad \text{b)} \quad \dot{x} = t^2 - x.$$

8. Dibuixa els diagrames de fase associats a les equacions diferencials següents i determineu-ne els possibles estats d'equilibri:

$$\text{a)} \quad \dot{x} = x - 1, \qquad \text{b)} \quad \dot{x} + 2x = 2, \qquad \text{c)} \quad \dot{x} = x^2 - 9.$$

9. Considera l'equació diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

a) Troba la solució general d'aquesta equació de variables separables, i dibuixeu algunes corbes integrals en el pla tx. Què passa amb la solució quan $t \to \infty$ per a diferents condicions inicials $x(0) = x_0$?
b) Dibuixa el diagrama de fase de l'equació. Trobeu els estats d'equilibri i digueu si són estables o inestables. Compareu aquest resultat amb els de l'apartat anterior.

10. Troba la solució general de les equacions diferencials de primer ordre

$$\text{a)} \quad \dot{x} = te^t - t, \qquad \text{b)} \quad e^t\dot{x} = t + 1.$$

11. Integra les equacions diferencials lineals de primer ordre següents, i doneu, quan sigui el cas, la solució particular que passa pel punt que s'indica:
a) $\dot{x} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$,
b) $\dot{x} + 4x = e^t$, $\quad x(0) = -3$,
c) $\dot{x} + tx - t^3 = 0$, $\quad x(2) = 0$.

12. La funció demanda, $D(t)$, i la funció oferta, $S(t)$, per al model d'ajustament de preus

$$\frac{dP(t)}{dt} = 0.75(D(t) - S(t))$$

venen donades per

$$D(t) = 6 - 2P(t), \qquad S(t) = -2 + 4P(t).$$

Per a la condició inicial $P(0) = 3$, obté:
a) La trajectòria temporal del preu.
b) La tendència del preu per a un temps prou gran.
Representeu las trajectòries corresponents a diferentes condicions inicials.

13. Contesta les mateixes qüestions del problema anterior si ara les dades són:

$$\begin{aligned} D(t) &= 4 - 6P(t) \\ S(t) &= -3 + 2P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= 0.8(D(t) - S(t)) \end{aligned}$$

i la condició inicial és: a) $P(0) = 3/4$, b) $P(0) = 2$.

14. Resol les equacions diferencials lineals de segon ordre, tot donant la solució particular quan sigui el cas:
a) $3\ddot{x} - 2\dot{x} - 8x = 0$,
b) $3\ddot{x} - \dot{x} = 0$,
c) $2\ddot{x} + 5\dot{x} = 0$,
d) $\ddot{x} - 8x = 0$,
e) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$,
f) $\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0$,
g) $\ddot{x} + 3\dot{x} - 5x = 0$,
h) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 2t + 6$,
i) $\ddot{x} + 3\dot{x} = 4t - 5$,
j) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 5e^{6x}$,
k) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0, \quad x(0) = 6, \dot{x}(0) = 10$,
l) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = -10, \quad x(0) = 12,\ \dot{x}(0) = -2$,
m) $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 27, \quad x(0) = 5,\ \dot{x}(0) = -5$,
n) $\ddot{x} + 9x = 9, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1$,
o) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 1, \quad x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = \frac{3}{2}$.

15. En equilibri, el model de mercat amb expectatives de preus ve donat per l'equació $D(t) = S(t)$. Si la demanda i l'oferta en aquest model venen donades, respectivament, per

$$\begin{aligned} D(t) &= 16 - 4P(t) - 6\frac{dP(t)}{dt} + 4\frac{d^2P(t)}{dt^2} \\ S(t) &= -8 + 8P(t) + 4\frac{dP(t)}{dt} + 6\frac{d^2P(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

obte $P(t)$ per a les condicions inicials $P(0) = 3$ i $P'(0) = \frac{-5}{2}$.

16. Sigui ara el model de mercat anterior però amb

$$\begin{aligned} D(t) &= 2 - 2P(t) + 2\frac{dP(t)}{dt} + \frac{d^2P(t)}{dt^2} \\ S(t) &= -2 + 3P(t) + 6\frac{dP(t)}{dt} + 2\frac{d^2P(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

i considera la condició inicial $P(0) = 2$ i $P'(0) = 1$. Obte i estudia l'evolució temporal del preu.