

Macroeconomia Avançada I, Curs 2010-11
 Professor: Valeri Sorolla, valeri.sorolla@uab.cat
 Professor de pràctiques: Lorenzo Burlón,
 lorenzo.burlón@uab.cat

Problemes: Tècniques de l'economia dinàmica: Equacions diferencials i en diferències.

Equacions diferencials de primer ordre.

1. Busqueu les solucions general i específica de les següents equacions diferencials i comproveu-les:
 - a) $y' + 4y = 12$; $y(0) = 2$.
 - b) $k' - 2k = 0$; $k(0) = 9$.
 - c) $c' + 10c = 15$; $c(0) = 0$.
 - d) $h' + 4h = 6$; $h(0) = 1,5$.

2. La dinàmica del preu de mercat: Supposeu que les equacions de demanda i oferta del bé Q al moment t corresponen a:

$$Q^d(t) = \alpha - \beta P(t) \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

$$Q^s(t) = -\gamma + \delta P(t) \quad (\gamma > 0, \delta > 0).$$
 - a) Calculeu el preu d'equilibri.
 - b) Supposeu que la regla d'ajust del preu és:
 $P'(t) = j(Q^d(t) - Q^s(t)) \quad (j > 0)$. Interpreteu aquesta equació.
 - c) Escriviu l'equació del apartat anterior en termes de $P(t)$ i calculeu la solució específica.
 - d) Estudieu la trajectòria temporal de $P(t)$ i la seva convergència i representeu-la gràficament.

3. Calculeu la solució específica de l'equació diferencial $k' = sAk - (n + \delta)k$ i dibuixeu la trajectòria de k i del logaritme de k al llarg del temps suposant que $sA > n + \delta$. Quina és la taxa de creixement de k ?

4. Dibuixeu el diagrama de fase de les següents equacions diferencials de primer ordre:
 - a) $y' = y - 7$.
 - b) $k' = 1 - 5k$.
 - c) $c' = (c + 1)^2 - 16 \quad (c > 0)$.
 - d) $h' = 0,5h - h^2 \quad (h > 0)$.

5. Dibuixeu el diagrama de fase de les següents equacions diferencials i dibuixeu després el diagrama de fase en termes de la taxa de creixement de la variable:
 - a) $k' = Asf(k) - (n + \delta)k$ on $A > 0, 0 < s < 1, n > 0, \delta > 0$ i f és una funció concava.
 - b) $k' = Ask^\alpha - (n + \delta)k$ on $A > 0, 0 < s < 1, 0 < \alpha < 1, n > 0$ i $\delta > 0$.

Equacions en diferències de primer ordre.

6. Busqueu la solució general de l'equació en diferències $Y_{t+1} + aY_t = c$ quan $a = -1$.

7. El model de la teranyina: Supposeu que les equacions de demanda i oferta del bé Q al moment t corresponen a:

$$Q_t^d = \alpha - \beta P_t \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

$$Q_t^s = -\gamma + \delta P_{t-1} \quad (\gamma > 0, \delta > 0).$$

Suposeu que en cada moment del temps hi ha igualtat entre l'oferta i la demanda.

- a) Interpreteu les equacions del model.
 - b) Estudieu la trajectòria temporal de P_t i la seva convergència.
8. Exercici 16.2.4 del Chiang.
9. Analitzeu la convergència de la trajectòria temporal de les solucions del problema anterior.
10. Exercicis 16.6.2 i 16.6.3 del Chiang.
11. Considereu el següent model macroeconòmic:
 $y_t - \underline{y} = -\alpha(\pi_t - \pi^*)$; $\pi_t = \pi_{t-1} + \gamma(y_t - \underline{y})$. Escriviu aquest sistema com a una única equació en diferències en termes de π , calculeu la solució i el seu valor a llarg termini. Calculeu també quan es triga partint d'un punt inicial en arribar a la meitat del recorregut.
12. Dibuixeu el diagrama de fase de la següent equació en diferències: $k_{t+1} = (1/(1+n)) [A s k_t^\alpha + (1-\delta)k_t]$ on $A > 0, 0 < s < 1, 0 < \alpha < 1, n > 0$ i $\delta > 0$.
13. Resteu de l'equació en diferències del problema anterior k_t i representeu el diagrama de fase en termes de $\Delta k_t = k_{t+1} - k_t$. Compareu l'expressió anterior amb la del model de Solow del llibre del Mankiw.

Sistemes dinàmics.

14. Sistema lineal, estudi analític:
 Considereu el sistema de equacions diferencials que ve donat per les següents equacions:
 $\pi^e' = -\lambda(1-h)\pi^e - \lambda\gamma_1 u + \lambda(\gamma_0 - T)$, on $1 > \lambda > 0, 1 > h > 0, \gamma_1 > 0, \gamma_0 > 0$ i $T > 0$.
 $u' = kh\pi^e - k\gamma_1 u + (\gamma_0 - T - m)$, on $k > 0$ i $m > 0$.
- a) Interpreteu les equacions del model.
 - b) Escriviu en forma matricial el sistema.
 - c) Definiu els integrals particulars, expliqueu com es calculen i interpreteu-los economicament.
 - d) Escriviu en forma matricial el sistema homogeni.
 - e) Calculeu l'equació característica.
 - f) Analitzeu la convergència del sistema als integrals particulars (La manera més fàcil és aplicar el teorema de Routh).
 - g) Interpreteu el resultat obtingut.
15. Sistema lineal, diagrama de fase:
 Dibuixeu el diagrama de fase del sistema lineal de l'exercici anterior en el pla (u, π^e) (u a l'eix horitzontal i π^e a l'eix vertical) seguint els següents passos:
- a) Dibuixeu la corba de demarcació $u' = 0$. Argumenteu i dibuixeu el moviment de la variable u sino ens trobem en aquesta corba.

- b) Dibuixeu la corba de demarcació $\pi^e=0$. Argumenteu i dibuixeu el moviment de la variable π^e sino ens trobem en aquesta corba.
- c) Combineu els dos gràfics anteriors, senyalant els moviments a les diferents zones, les trajectòries principals i l'equilibri estacionari.
- d) Quin tipus de diagrama de fase heu obtingut?
- e) Interpreteu el resultat obtingut.

16. Sistema lineal, estudi analític:

Considerem el sistema que ve donat per les següents equacions en diferències:

$$\pi_{t+1} - \pi_t = \gamma_0 - T - \gamma_1 u_{t+1}, \text{ on } \gamma_1 > 0, \gamma_0 > 0 \text{ i } T > 0.$$

$$u_{t+1} - u_t = -k + (m - \pi_{t+1}), \text{ on } k > 0 \text{ i } m > 0.$$

- a) Interpreteu les equacions del model.
- b) Escriviu en forma matricial el sistema.
- c) Calculeu els integrals particulars.
- d) Calculeu l'equació característica.
- e) Analitzeu la convergència del sistema als integrals particulars.
- f) Interpreteu el resultat obtingut.

17. Sistema no lineal, diagrama de fase:

Dibuixeu el diagrama de fase del següent sistema d'equacions diferencials:

$$y' / y = (1/\theta) (f'(x) - \delta - \rho);$$

$x' = f(x) - y - (\delta + n)x$; on $f(x)$ és una funció concava i $\rho > n$.
seguint els següents passos.

- a) Dibuixeu la corba de demarcació $y'=0$ amb x a l'eix horitzontal i y a l'eix vertical i les fletxes que indiquen com es mou la variable y si no ens trobem en aquesta corba.
- b) Dibuixeu la corba de demarcació $x'=0$ amb x a l'eix horitzontal i y a l'eix vertical i les fletxes que indiquen com es mou la variable x si no ens trobem en aquesta corba.
- c) Superposeu els dos gràfics i dibuixeu algunes trajectòries.
- d) Quin tipus de diagrama de fase heu obtingut?