Models Matemàtics de l'Economia (e2516701, e2516751)
6 Setembre 2001
Prof. J. E. Martínez Legaz

N.^{o} PERMUTACIÓ: 1

1. El conjunto $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y - x^2 \geq 0,\ 2x + y \leq 3,\ x \geq 0\right\}$

(a) es convexo, puesto que es la intersección de los conjuntos convexos $C_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y - x^2 \geq 0\right\}$, $C_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x + y \leq 3\right\}$ y $C_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0\right\}$.

(b) no es convexo, puesto que el conjunto $C_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y - x^2 \geq 0\right\}$ no es convexo.

(c) es convexo, puesto que su complementario es un conjunto abierto.

(d) no es convexo, puesto que es vacío.

2. La función $f(x,y) = \frac{x^2}{y} - \ln y$

(a) es convexa, puesto que en todo punto de su dominio tiene matriz hessiana definida positiva.

(b) no es convexa, puesto que su dominio no es un conjunto convexo.

(c) no es convexa, puesto que existen puntos de su dominio en los que su matriz hessiana es definida negativa.

(d) es cóncava, puesto que es suma de funciones cóncavas.

3. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 12y$. El punto $(\frac{3}{2}, 6)$

(a) es máximo global.

(b) es mínimo global.

(c) es punto de silla.

(d) no es punto estacionario.

4. Considérese el problema

$$\begin{array}{cc} \text{maximizar o minimizar} & xy \\ \text{sujeto a} & x - y = 1. \end{array}$$

El punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

(a) es máximo local.

(b) es mínimo local.

(c) es punto de silla.

(d) no satisface la condición de Lagrange.

5. Considérese el problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & f(x,y) \\ \text{sujeto a} & g(x,y) \leq 0, \end{array}$$

siendo f y g funciones convexas.

(a) Todo óptimo local es global.

(b) Todo óptimo global $(\overline{x}, \overline{y})$ satura la restricción (es decir, se cumple $g(\overline{x}, \overline{y}) = 0$).

(c) Si tiene soluciones factibles, entonces necesariamente tiene alguna solución óptima.

(d) Puede no tener soluciones factibles y, en cambio, tener alguna solución óptima.

Problema 1 (preguntas 6 y 7)
Considérese el problema

$$\begin{array}{cc} \text{maximizar} & x^4 + y^4 \\ \text{sujeto a} & x^2 + y^2 = 1. \end{array}$$

6. El punto $(x, y, \lambda) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$
(a) es el único que satisface la condición de Lagrange.
(b) satisface la condición de Lagrange, pero no es el único.
(c) no satisface la condición de Lagrange, pero otros puntos la satisfacen.
(d) no satisface la condición de Lagrange; en realidad, ningún punto la satisface.
7. La función objetivo
(a) es cóncava en todo su dominio.
(b) no es cóncava en todo su dominio, pero sí lo es en un entorno del punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
(c) es convexa.
(d) no es ni cóncava ni convexa.

Problema 2 (preguntas 8 y 9)

Considérese el problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & x - 2y \\ \text{sujeto a} & x^2 + y^2 \leq 5 \\ & x - y \leq 1. \end{array}$$

8. Una solución de las condiciones de Kuhn-Tucker es $(x, y) =$
(a) $(-1, 2)$.
(b) $(1, -2)$.
(c) $(2, -1)$.
(d) $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
9. El punto de la pregunta anterior
(a) es un máximo global.
(b) es un mínimo global.
(c) es un mínimo local pero no es un mínimo global.
(d) no es ni máximo local ni mínimo local.

10. Considérese el problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & xy \\ \text{sujeto a} & x^3 + y^3 \leq 2. \end{array}$$

(a) No existe ningún punto que satisfaga las condiciones de Kuhn-Tucker.
(b) Existe un único punto que satisface las condiciones de Kuhn-Tucker.
(c) Existen exactamente dos puntos que satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker.
(d) Existen exactamente tres puntos que satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker.

11. Considérese el problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x,y) \\ \text{sujeto a} & g(x,y) = c \end{array}$$

Sea $(\overline{x}, \overline{y})$ una solución óptima del problema y sea $\overline{\lambda}$ el multiplicador de Lagrange asociado (la función lagrangiana es $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,(g(x,y) - c)$). Supongamos que $\overline{\lambda}$ es.negativo. Si se sustituye el segundo miembro de la restricción por $c + \epsilon$, siendo ϵ un número positivo muy pequeño, entonces el valor mínimo del problema

(a) aumentará.
(b) disminuirá.
(c) no cambiará.
(d) puede ser que aumente, disminuya o no cambie; depende del problema.

Problema 3 (preguntas 12, 13 y 14)

Considérese el problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x + y \\ \text{sujeto a} & x + 2y \leq 6 \\ & 2x + y \leq 6 \\ & 2x + 2y \leq 6. \end{array}$$

12. El conjunto de soluciones óptimas
(a) es vacío.
(b) se reduce al punto $(3, 0)$.
(c) contiene exactamente dos puntos.
(d) contiene infinitos puntos.

13. El problema dual es

(a)
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 6\lambda + 6\mu + 6\nu \\ \text{sujeto a} & \lambda + 2\mu + 2\nu \geq 1 \\ & 2\lambda + \mu + 2\nu \geq 1 \\ & \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \nu \geq 0. \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 6\lambda + 6\mu + 6\nu \\ \text{sujeto a} & \lambda + 2\mu + 2\nu \leq 1 \\ & 2\lambda + \mu + 2\nu \leq 1 \\ & \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \nu \geq 0. \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 6\lambda + 6\mu + 6\nu \\ \text{sujeto a} & \lambda + 2\mu + 2\nu \geq 1 \\ & 2\lambda + \mu + 2\nu \geq 1. \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 6\lambda + 6\mu + 6\nu \\ \text{sujeto a} & \lambda + 2\mu + 2\nu = 1 \\ & 2\lambda + \mu + 2\nu = 1 \\ & \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \nu \geq 0. \end{array}$$

14. El conjunto de soluciones óptimas del problema dual
(a) es vacío.
(b) se reduce al punto $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.
(c) se reduce al punto $(0, 0, \frac{1}{2})$.
(d) es una arista del poliedro de soluciones factibles.

15. La ecuación diferencial $\dot{x} = -\frac{1+t}{1+x}e^{t-x}$ tiene por solución (en forma implícita)

(a) $\frac{1+t}{1+x}e^{t-x} = C$.
(b) $\frac{1+t}{1+x}e^{x-t} = C$.
(c) $xe^t + te^x = C$..
(d) $xe^x + te^t = C$.

16. La ecuación diferencial $\dot{x} = \frac{x^2-3}{x}$
(a) no tiene ningún estado de equilibrio.
(b) tiene un único estado de equilibrio, que es estable.
(c) tiene dos únicos estados de equilibrio, que son inestables.
(d) tiene tres estados de equilibrio, uno estable y dos inestables.

17. Considérese la ecuación diferencial $\ddot{x} + \pi^2 x = 2$.
(a) Su solución general es $x = A\sin\pi t + B\cos\pi t$.
(b) No tiene ninguna solución que cumpla las condiciones $x(0) = -2$, $x(2) = 0$.
(c) La solución que cumple las condiciones $x(0) = -2$, $x(2) = 0$ es $x = -2\cos\pi t$.
(d) Su solución general es $x = A\sin\pi t + B\cos\pi t - \frac{2}{\pi^2}$.

Problema 4 (preguntas 18 y19)

Considérese la ecuación diferencial $\ddot{x} - 2\dot{x} = 2e^t$.

18. La solución general de la ecuación homogénea es
(a) $x = Ae^{2t} + Be^t$.
(b) $x = Ae^{2t} - e^t$.
(c) $x = A + Be^{2t}$.
(d) $x = Ae^{2t}$.

19. Una solución particular de la ecuación no homogénea es
(a) del tipo $x = Ae^t$, con A constante.
(b) del tipo $x = Ate^t$, con A constante.
(c) del tipo $x = Ae^{t^2}$, con A constante.
(d) constante.

20. Considérese la ecuación diferencial $5\ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = 0$.
(a) Su solución general es $x = Ae^{\frac{3}{5}t} + Be^{\frac{4}{5}t}$.
(b) Su solución general es $x = Ae^{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}t} + Be^{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}t}$.
(c) Su solución general es $x = e^{\frac{3}{5}t}\left(A\sin\frac{4}{5}t + B\cos\frac{4}{5}t\right)$.
(d) Se trata de una ecuación globalmente asintóticamente estable.